1 次の hakken.の法則を読んで内容を覚えなさい。

ABCDE

因数分解　hakken.の法則

★因数（いんすう）…単項式や多項式が，いくつかの単項式や多項式の積の形で表されるとき，その1つ1つの式を，もとの式の**因数**という。

例　$2xy$ では，2，x，y は因数である。

★因数分解（いんすうぶんかい）…多項式をいくつかの因数の積の形に表すことをその多項式を**因数分解**するという。

展開

$(2x+3)(2x-3) \rightleftarrows 4x^2-9$

因数分解

★共通因数（きょうつういんすう）…$ax+ay$ のように，各項に共通な因数 a をもつ多項式は，**共通因数** a をとり出して因数分解することができる。

$\boldsymbol{ax+ay=a(x+y)}$

例　次の式を因数分解しなさい。

(1)　$x^2-6x=\underline{\underline{x}}\times x-\underline{\underline{x}}\times 6$

$=\underline{\underline{x}}(x-6)$

(2)　$4ab+2a=\underline{\underline{2a}}\times 2b+\underline{\underline{2a}}\times 1$

$=\underline{\underline{2a}}(2b+1)$

共通因数

2 次の式を因数分解しなさい。

ABCDE

①　a^2b-ac

$=\boldsymbol{a(ab-c)}$

②　x^2y-xy^2

$=\boldsymbol{xy(x-y)}$

3 次の式を因数分解しなさい。

ABCDE

①　$9x^2y+12xy^2$

$=\boldsymbol{3xy(3x+4y)}$

②　$12x^2y-9xy^2+3xy$

$=\boldsymbol{3xy(4x-3y+1)}$

4 次の hakken.の法則を読んで内容を覚えなさい。

ABCDE

因数分解の公式を使った因数分解 hakken.の法則

★公式１’ $\boldsymbol{x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)}$

公式２’ $\boldsymbol{x^2+2xy+y^2=(x+y)^2}$

公式３’ $\boldsymbol{x^2-2xy+y^2=(x-y)^2}$

公式４’ $\boldsymbol{a^2-b^2=(a+b)(a-b)}$

★公式１’ $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$を利用した因数分解

例 (1) x^2+6x+5

［解き方］ $x^2\ \boxed{+6}\ x\ \ \boxed{+5}$

$\boxed{a+b=6}\ \ \boxed{ab=5}$

積が＋5	和が＋6
1，　5	○
−1，−5	

$x^2+6x+5=(x+1)(x+5)$

［答］ $(x+1)(x+5)$

(2) t^2-6t+8

$t^2\ \boxed{-6}\ t\ \ \boxed{+8}$

$\boxed{a+b=-6}\ \ \boxed{ab=8}$

積が＋8	和が−6
1，　8	
−1，−8	
2，　4	
−2，−4	○

$t^2-6t+8=(t-2)(t-4)$

［答］ $(t-2)(t-4)$

★公式２’，公式３’ $x^2+2xy+y^2=(x+y)^2$，$x^2-2xy+y^2=(x-y)^2$ を利用した因数分解

例 (1) $9x^2+12x+4$

［解き方］ $9x^2=(3x)^2$，$4=2^2$，$12x=2\times3x\times2$

［答］ $(3x+2)^2$

(2) $4a^2-20ab+25b^2$

$4a^2=(2a)^2$, $25b^2=(5b)^2$, $20a=2\times2a\times5b$

［答］ $(2a-5b)^2$

★公式４’$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$を利用した因数分解

例 (1) $9x^2-4$

$=(3x)^2-2^2$

$=(3x+2)(3x-2)$

［答］ $(3x+2)(3x-2)$

(2) $64x^2-1$

$=(8x)^2-1^2$

$=(8x+1)(8x-1)$

［答］ $(8x+1)(8x-1)$

5 次の式を因数分解しなさい。

ABCDE

① $a^2-6a-16$

$=\boldsymbol{(a+2)(a-8)}$

② $x^2+2x-15$

$=\boldsymbol{(x-3)(x+5)}$

③ $t^2+11t+18$

$=\boldsymbol{(t+2)(t+9)}$

④ $y^2-5y-36$

$=\boldsymbol{(y+4)(y-9)}$

6 次の式を因数分解しなさい。

ABCDE

① $x^2-2xy-3y^2$

$=(x+y)(x-3y)$

② $x^2+8xy+16y^2$

$=(x+4y)^2$

③ $x^2-10xy+9y^2$

$=(x-y)(x-9y)$

④ $a^2+4ab-5b^2$

$=(a-b)(a+5b)$

7 次の式を因数分解しなさい。

ABCDE

① x^2-9y^2

$=(x+3y)(x-3y)$

② $x^2+8xy+12y^2$

$=(x+2y)(x+6y)$

③ $x^2-10xy-24y^2$

$=(x+2y)(x-12y)$

④ $x^2-8xy+16y^2$

$=(x-4y)^2$

8 次の式を因数分解しなさい。

ABCDE

① $x^2+3xy-10y^2$

$=(x-2y)(x+5y)$

② $x^2+8xy+7y^2$

$=(x+y)(x+7y)$

③ $x^2+12xy+36y^2$

$=(x+6y)^2$

④ $9+x^2-10x=\boldsymbol{x^2-10x+9}$

$=(x-1)(x-9)$

9 x^2+7x+a が，自然数 b，c を用いて$(x+b)(x+c)$と因数分解できるような定数 a の値をすべて答えなさい。

CDE

$\boldsymbol{7=b+c}$ であるから，$\boldsymbol{(b,\ c)}$の組み合わせは$\boldsymbol{(1,\ 6)}$，$\boldsymbol{(2,\ 5)}$，$\boldsymbol{(3,\ 4)}$の **3** 通りである。

また，$\boldsymbol{a=b\times c}$ であるから，$\boldsymbol{a}$ の値は **6，10，12** となる。

$\boldsymbol{a=6,\ 10,\ 12}$

10 ABCDE 次の hakken.の法則を読んで内容を覚えなさい。

いろいろな因数分解（１） hakken.の法則

例 次の式を因数分解しなさい。

(1) $ax^2+8ax+15a$

$=a(x^2+8x+15)$ ❷ 共通因数は a

$=a(x+3)(x+5)$ ❸ 因数分解

(2) $24x-48-3x^2$

$=-3x^2+24x-48$ ❶ 次数の大きい順に並びかえる

$=-3(x^2-8x+16)$ ❷ 共通因数は－3

$=-3(x-4)^2$ ❸ 因数分解

★因数分解の解き方

❶次数の大きい順に並びかえる

❷共通因数を取り出す

❸かっこの中の式の因数分解を考える

（❶，❷はしなくて良い場合もある）

11 ABCDE 次の式を因数分解しなさい。

① $8-8x+2x^2$

$=2x^2-8x+8$

$=2(x^2-4x+4)$

$=2(x-2)^2$

② $-8+2x^2$

$=2x^2-8$

$=2(x^2-4)$

$=2(x+2)(x-2)$

12 ABCDE 次の式を因数分解しなさい。

① $-x^2-3x+54$

$=-(x^2+3x-54)$

$=-(x-6)(x+9)$

② $-3x^2+33x-90$

$=-3(x^2-11x+30)$

$=-3(x-5)(x-6)$

13 ABCDE 次の式を因数分解しなさい。

① $4ax^2-16ax+16a$

$=4a(x^2-4x+4)$

$=4a(x-2)^2$

② $2ab^2-72a$

$=2a(b^2-36)$

$=2a(b+6)(b-6)$

14 BCDE 次の hakken.の法則を読んで内容を覚えなさい。

いろいろな因数分解（２） hakken.の法則

例 (1) $(x-y)^2-4(x-y)+4$

$x-y=\mathrm{A}$ とおく

$\mathrm{A}^2-4\mathrm{A}+4$

$=(\mathrm{A}-2)^2$

$=\{(x-y)-2\}^2$

$=(x-y-2)^2$

(2) $2ax+a-2bx-b$

$=a(2x+1)-b(2x+1)$

$2x+1=\mathrm{A}$ とおく

$=a\mathrm{A}-b\mathrm{A}$

$=\mathrm{A}(a-b)$

$=(2x+1)(a-b)$

15 次の式を因数分解しなさい。

BCDE

① $2x(3-y)-y+3$

$=2x(3-y)+3-y$

$3-y=A$ とおく

$2xA+A$

$=A(2x+1)$

$=(3-y)(2x+1)$

② $xy-x-y+1$

$=x(y-1)-(y-1)$

$y-1=A$ とおく

$Ax-A$

$=A(x-1)$

$=(y-1)(x-1)$

16 次の式を因数分解しなさい。

BCDE

① $ax+ay-bx-by$

$=a(x+y)-b(x+y)$

$x+y=A$ とおく

$aA-bA$

$=A(a-b)$

$=(x+y)(a-b)$

② $(x+y)^2-81$

$x+y=A$ とおく

A^2-9^2

$=(A+9)(A-9)$

$=(x+y+9)(x+y-9)$

17 次の式を因数分解しなさい。

BCDE

① x^2-x-y^2+y

$=x^2-y^2-x+y$

$=(x-y)(x+y)-(x-y)$

$x-y=A$ とおく

$=A(x+y)-A$

$=A(x+y-1)$

$=(x-y)(x+y-1)$

② $x^2-4x+4-y^2$

$=(x-2)^2-y^2$

$x-2=A$ とおく

$=A^2-y^2$

$=(A+y)(A-y)$

$=(x-2+y)(x-2-y)$

18 BCDE 次の hakken.の法則を読んで内容を覚えなさい。

いろいろな因数分解（３） hakken.の法則

例 (1)　x^2+ax-3 を因数分解すると$(x-3)(x+b)$になるとき，a，b の値を求めなさい。

［解き方］　$(x-3)(x+b)$を展開すると，$x^2+(-3+b)x-3b$ となるので

$x^2+ax-3=x^2+(-3+b)x-3b$

$\begin{cases} a=(-3+b) & \cdots① \\ 3=3b & \cdots② \end{cases}$　連立方程式を解くと

②より $b=1$　これを①に代入して　$a=-2$

［答］　$a=-2$，$b=1$

(2)　$x^2+px-5=(x+a)(x+b)$の形に因数分解できるような整数 p の値をすべて答えなさい。

［解き方］　$-5=5\times(-1)$ ，$-5=1\times(-5)$　だから

$x^2+px-5=(x+5)(x-1)$　　$x^2+px-5=(x+1)(x-5)$

$=x^2+4x-5$　　$=x^2-4x-5$

［答］　$p=-4$，$+4$

19 BCDE 次の問いに答えなさい。

① x^2+ax-6 を因数分解すると$(x-3)(x+b)$になるとき，a，b の値を求めなさい。

$(x-3)(x+b)=x^2+(-3+b)x-3b$ だから

x^2+ax-6 より

$6=3b$

$3b=6$

$b=2$　これを$(x-3)(x+b)$に代入　$(x-3)(x+2)=x^2-x-6$

x^2+ax-6 より

$a=-1$

$a=-1$，$b=2$

② $x^2+px-18=(x+a)(x+b)$の形に因数分解できるような整数 p の値をすべて答えなさい。

$ab=-18$ より

$p=1-18=-17$

$p=2-9=-7$

$p=3-6=-3$

$p=-1+18=17$

$p=-2+9=7$

$p=-3+6=3$

$p=-17$，-7，-3，3，7，17

20 CDE 次の hakken.の法則を読んで内容を覚えなさい。

式の計算の利用 啓 P.29～30 hakken.の法則

例 連続する 2 つの奇数の積に 1 を加えた数は 4 の倍数になることを証明しなさい。

［証明］ n を整数とすると，連続する 2 つの奇数は $2n+1$，$2n+3$ と表される。

それらの積に 1 を加えた数は $(2n+1)(2n+3)+1$

$=4n^2+8n+3+1$

$=4n^2+8n+4$

$=4(n+1)^2$

$n+1$ は整数なので，$4(n+1)^2$ は，4 の倍数である。

よって連続する 2 つの奇数の積に 1 を加えた数は，4 の倍数になる。

21 CDE 連続した 2 つの奇数の積は奇数になることを証明しなさい。

n を整数とすると，

連続した 2 つの奇数は $2n-1$，$2n+1$ と表される。

その積は，$(2n-1)(2n+1)=4n^2-1$

$=2(2n^2)-1$

$2n^2$ は整数なので，$2(2n^2)-1$ は奇数になる。

よって，連続した 2 つの奇数の積は奇数になる。

22 CDE 連続する 3 つの整数で，最大の数と最小の数の積に 1 を加えた数は，中央数の平方になることを証明しなさい。

まん中の整数を n とすると，

連続する 3 つの数は，$n-1$，n，$n+1$ と表される。

このとき，最大の数と最小の数の積に 1 を加えた数は，

$(n+1)(n-1)+1=n^2-1+1$

$=n^2$

n^2 は整数だから，これは中央数の平方である。

23 次の hakken.の法則を読んで内容を覚えなさい。
ABCDE

因数分解や展開を利用した計算 hakken.の法則

★因数分解の公式や式の展開を利用すると，計算が簡単にできることがある。

例 (1) $65^2-35^2=(65+35)(65-35)$
$=100\times 30$
$=3000$

(2) $85^2=(80+5)^2$
$=80^2+2\times 80\times 5+5^2$
$=6400+800+25$
$=7225$

(3) $28\times 32=(30-2)(30+2)$
$=30^2-2^2$
$=900-4$
$=896$

24 因数分解や展開を利用して，次の計算をしなさい。
ABCDE

① 29^2
$=(30-1)^2$
$=900-60+1$
$=\mathbf{841}$

② 103×97
$=(100+3)\times(100-3)$
$=10000-9$
$=\mathbf{9991}$

25 因数分解や展開を利用して次の計算をしなさい。
CDE

① 3.04×2.96
$=(3+0.04)(3-0.04)$
$=3^2-0.04^2$
$=9-0.0016$
$=\mathbf{8.9984}$

② $5.1^2\times 3.14-4.9^2\times 3.14$
$=(5.1^2-4.9^2)\times 3.14$
$=(5.1+4.9)(5.1-4.9)\times 3.14$
$=10\times 0.2\times 3.14$
$=\mathbf{6.28}$

26 次の hakken.の法則を読んで内容を覚えなさい。
BCDE

式の値の計算 hakken.の法則

例 $x=35$，$y=3$ のとき，$(x+3y)^2-(x+y)(x+4y)$の値を求めなさい。
［解き方］ 式を簡単にしてから代入する。

$(x+3y)^2-(x+y)(x+4y)=x^2+6xy+9y^2-(x^2+5xy+4y^2)$
$=xy+5y^2$
$=y(x+5y)$
$=3\times(35+5\times 3)$
$=3\times 50$
$=150$

27 BCDE

$x=27$ のとき，$(x-3)(x-6)-(x-5)^2$ の値を求めなさい。

$$\begin{aligned}(x-3)(x-6)-(x-5)^2&=x^2-9x+18-(x^2-10x+25)\\&=x^2-9x+18-x^2+10x-25\\&=x-7\\&=27-7\\&=\mathbf{20}\end{aligned}$$

28 BCDE

$x=17$，$y=5$ のとき，$(x+y)(x-y)-x(x-2y)$の値を求めなさい。

$$\begin{aligned}(x+y)(x-y)-x(x-2y)&=x^2-y^2-(x^2-2xy)\\&=x^2-y^2-x^2+2xy\\&=-y^2+2xy\\&=-5^2+2\times17\times5\\&=\mathbf{145}\end{aligned}$$

29 BCDE

$a=6.25$，$b=3.75$ のとき，a^2-b^2 の値を求めなさい。

$$\begin{aligned}a^2-b^2&=(a+b)(a-b)\\&=(6.25+3.75)\times(6.25-3.75)\\&=10\times2.5\\&=\mathbf{25}\end{aligned}$$

30 BCDE

$a+b=4$，$ab=-\frac{9}{4}$のとき，次の式の値を求めなさい。

① $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

$$\begin{aligned}&=4^2-2\times\left(-\frac{9}{4}\right)\\&=16+\frac{9}{2}\\&=\frac{32}{2}+\frac{9}{2}\\&=\mathbf{\frac{41}{2}}\end{aligned}$$

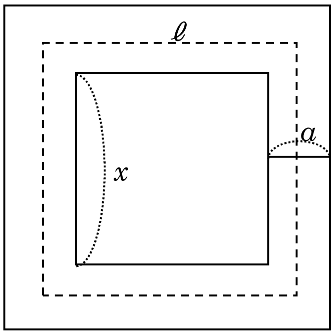
② $(a^2-1)(b^2-1)=a^2b^2-a^2-b^2+1$

$$\begin{aligned}&=(ab)^2-(a^2+b^2)+1\\&=\left(-\frac{9}{4}\right)^2-\frac{41}{2}+1\\&=\frac{81}{16}-\frac{328}{16}+\frac{16}{16}\\&=\mathbf{-\frac{231}{16}}\end{aligned}$$

31 CDE 次の hakken.の法則を読んで内容を覚えなさい。

図形の性質の証明　hakken.の法則

例 右の図のように，一辺の長さが x である正方形の土地の周りに，幅 a の道がある。
この道の面積を S，道のまん中を通る線の長さを ℓ とするとき，$S=a\ell$ となる。
このことを証明しなさい。



［解き方］ S，ℓ をそれぞれ a，x を使って表す。

［証明］ $S=(x+2a)^2-x^2=x^2+4ax+4a^2-x^2$

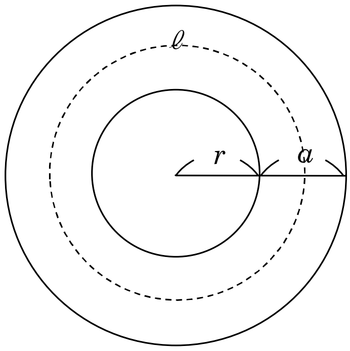
$=4ax+4a^2$ …①

$\ell=4(x+a)=4x+4a$

したがって，$a\ell=a(4x+4a)=4ax+4a^2$ …②

①，②より，$S=a\ell$

32 CDE 半径 r の池の周りに幅 a の道がついている。道のまん中を通る線の長さを ℓ とすると，道の面積は，$S=a\ell$ になることを証明しなさい。



外の円の面積は $\pi(a+r)^2$

中の円の面積は πr^2

だから，道の面積 S は，

$S=\pi(a+r)^2-\pi r^2$

$=\pi(a^2+2ar+r^2)-\pi r^2$

$=\pi a^2+2\pi ar+\pi r^2-\pi r^2$

$=\pi a^2+2\pi ar$ …①

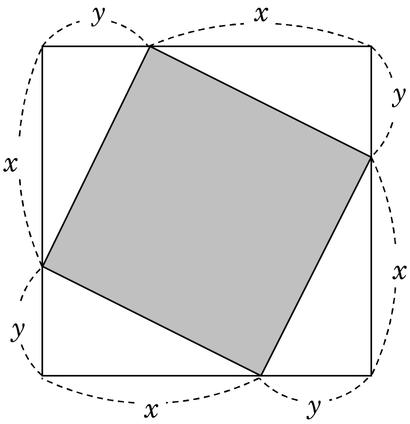
また，$\ell=2\pi(\frac{a}{2}+r)$

$=\pi a+2\pi r$

よって，$a\ell=\pi a^2+2\pi ar$ …②

①，②より，$S=a\ell$ となる。

33 右の図のような正方形で，色をつけた中の四角形の面積を求めなさい。
CDE



(色をつけた中の四角形)＝(正方形)－(三角形)×4

$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$

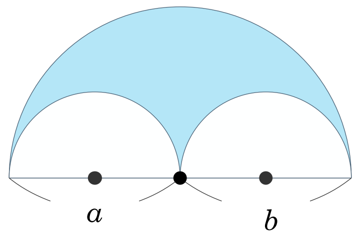
$x\times y\div 2=\dfrac{xy}{2}$

$\dfrac{xy}{2}\times 4=2xy$

$x^2+2xy+y^2-2xy=x^2+y^2$

x^2+y^2

34 右の図の色を付けた部分の面積を求めなさい。
DE



$\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2\pi\div 2-\left(\dfrac{a}{2}\right)^2\pi\div 2-\left(\dfrac{b}{2}\right)^2\pi\div 2$

$=\left\{\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2-\left(\dfrac{a}{2}\right)^2-\left(\dfrac{b}{2}\right)^2\right\}\pi\div 2$

$=\left\{\dfrac{(a+b)^2}{4}-\dfrac{a^2}{4}-\dfrac{b^2}{4}\right\}\pi\div 2$

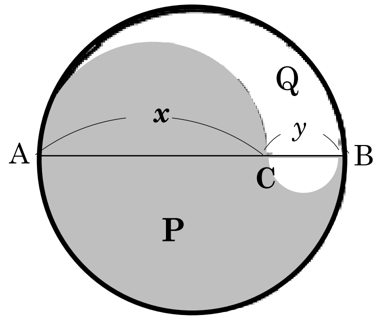
$=\left\{\dfrac{a^2+2ab+b^2}{4}-\dfrac{a^2}{4}-\dfrac{b^2}{4}\right\}\pi\div 2$

$=\dfrac{2ab}{4}\pi\div 2$

$=\dfrac{ab}{4}\pi$

$\dfrac{ab}{4}\pi$

35
DE
右の図でAC : CBと面積P : Qの間にはどんな関係があるか答えなさい。



$$P=(\frac{x}{2})^2\pi\div2+(\frac{x+y}{2})^2\pi\div2-(\frac{y}{2})^2\pi\div2$$
$$=\{(\frac{x}{2})^2+(\frac{x+y}{2})^2-(\frac{y}{2})^2\}\pi\div2$$
$$=(\frac{x^2}{4}+\frac{(x+y)^2}{4}-\frac{y^2}{4})\pi\div2$$
$$=(\frac{x^2}{4}+\frac{x^2+2xy+y^2}{4}-\frac{y^2}{4})\pi\div2$$
$$=\frac{2x^2+2xy}{4}\pi\div2$$
$$=\frac{x^2+xy}{2}\pi\div2$$
$$=\frac{x\pi}{4}(x+y)$$

$$Q=(\frac{x+y}{2})^2\pi\div2-(\frac{x}{2})^2\pi\div2+(\frac{y}{2})^2\pi\div2$$
$$=\{(\frac{x+y}{2})^2-(\frac{x}{2})^2+(\frac{y}{2})^2\}\pi\div2$$
$$=\{\frac{(x+y)^2}{4}-\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}\}\pi\div2$$
$$=\{\frac{x^2+2xy+y^2}{4}-\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}\}\pi\div2$$
$$=\frac{2xy+2y^2}{4}\pi\div2$$
$$=\frac{y^2+xy}{2}\pi\div2$$
$$=\frac{y\pi}{4}(x+y)$$

$$P:Q=\frac{x\pi}{4}(x+y):\frac{y\pi}{4}(x+y)$$
$$=x:y$$
$$=AC:CB$$

AC : CB= P : Q